Автоматика и телемеханика, № 3, 2025

Нелинейные системы

© 2025 г. **А.В. ПЛАТОНОВ, канд. физ.-мат. наук (a.platonov@spbu.ru)**
(Санкт-Петербургский государственный университет)

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

Исследуется проблема устойчивости для одного класса нестационарных механических систем, находящихся под действием линейных диссипативных и нелинейных потенциальных сил. Предполагается, что система имеет переменную структуру. Переключения между разными режимами функционирования связаны со сменой потенциала системы, а также с разрывами нестационарных коэффициентов, присутствующих в системе. Рассматриваются два подхода к анализу устойчивости таких систем. Один связан с построением разрывной функции Ляпунова, другой опирается на построение непрерывной функции Ляпунова. Изучается влияние на устойчивость нестационарных возмущающих сил. Особенностью работы является то, что нестационарные параметры как в самой системе, так и в возмущениях могут быть неограниченными относительно времени или, напротив, могут сколь угодно близко приближаться к нулю. Таким образом, возникает задача сравнения скорости роста или убывания всех этих нестационарностей для получения условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость заданного положения равновесия системы.

Ключевые слова: нелинейные нестационарные механические системы, переключения, асимптотическая устойчивость, возмущения.

DOI: 10.31857/S0005231025030024, **EDN:** IEPRSI

1. Введение

В последние десятилетия активно развивается теория дифференциальных систем с разрывной правой частью. Такие системы находят множество практических приложений в различных областях человеческой деятельности. Методы А.М. Ляпунова, разработанные им для анализа устойчивости непрерывных систем, могут быть успешно распространены и на разрывные системы. В частности, значимые результаты в этом направлении были получены Е.А. Барбашиным, А.И. Лурье, А.М. Летовым, М.А. Айзерманом, А.А. Андроновым, Н.Н. Красовским, В.И. Зубовым, А.Ф. Филипповым, С.В. Емельяновым, В.М. Матросовым, А.Х. Гелигом, Г.А. Леоновым, В.А. Якубовичем, D. Liberzon, J.P. Hespanha, A.S. Morse и многими другими известными учеными (см., например, монографии [1, 2] и обзорные статьи [3, 4]). Важным классом разрывных систем являются системы с переключениями, способные функционировать в разных режимах [2]. Правило активации того или иного режима задается некоторой специальной функцией, называемой законом переключений. Проблеме оценки влияния переключений на различные динамические характеристики изучаемой системы посвящено множество работ, в том числе и в последние годы (см., например, [2, 5–12] и цитируемую там литературу). Так, в настоящее время актуальны направления исследований, связанные с анализом влияния переключений в сочетании с какими-то другими факторами, такими как нестационарность, возмущения, запаздывание, случайность, импульсные эффекты, сложность и гибридность внутренних взаимосвязей между различными переменными в системе и т.д. Рассматриваются законы переключений, зависящие как от времени, так и от текущего состояния системы. Активно развиваются подходы к построению как единой для всех режимов функции Ляпунова, так и составной функции Ляпунова, образованной из частных функций, соответствующих разным режимам. Отдельный интерес представляют нестационарные системы с переключениями [6–8]. Здесь на плавную динамику системы, вызванную непрерывным изменением нестационарных параметров, накладываются резкие колебания, вызванные разрывами нестационарных параметров или сменой структуры самой системы. Особенностью здесь является то, что количество возможных режимов функционирования системы становится, вообще говоря, бесконечным. Анализ таких систем усложняется, если нестационарные параметры в системе могут быть неограниченными или неотделенными от нуля.

Важным примером динамических систем являются механические системы. Известно, что присутствие в механических системах нестационарных параметров может приводить к принципиально новым динамическим эффектам [13, 14]. В настоящей работе изучается один класс нелинейных механических систем с разрывными нестационарными параметрами и переключаемыми силовыми полями. Закон переключений предполагается зависящим от времени. Таким образом, правые части исследуемой системы оказываются разрывными по времени и непрерывными по вектору состояния. Предлагаются разные способы построения подходящей функции Ляпунова. Наиболее естественным здесь является подход, связанный с использованием отдельных непрерывных функций Ляпунова на гладких промежутках функционирования системы и с конструированием из них итоговой разрывной функции Ляпунова. Однако такой подход может привести к достаточно жестким условиям устойчивости. Поэтому в работе также разрабатывается подход к построению единой непрерывной функции Ляпунова для всей гибридной системы. Кроме того, в работе исследуется влияние нестационарных возмущений на устойчивость заданного положения равновесия механической системы. Важно отметить, что искомые оценки на возмущения, вообще говоря, будут зависеть от ограничений, наложенных на закон переключений в исходной системе. Полученные в работе результаты могут применяться для анализа робастности нестационарных систем с переключениями.

2. Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную механическую систему, находящуюся под воздействием линейных диссипативных сил и нелинейных потенциальных сил:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} - p(t)\frac{\partial \Pi_\sigma(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{q} \in R^n$ и $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ — векторы обобщенных координат и скоростей соответственно; кинетическая энергия $T = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ системы задается квадратичной формой $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ с симметричной и непрерывно-дифференцируемой при $\mathbf{q} \in R^n$ матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{q})$; $\sigma = \sigma(t) : [0, +\infty) \to S = \{1, \ldots, N\}$ – кусочно-постоянная функция, определяющая закон переключений потенциалов системы; потенциалы $\Pi_s(\mathbf{q})$ описываются непрерывно дифференцируемыми при $\mathbf{q} \in R^n$ однородными порядка $\mu + 1$ функциями, $\mu > 1$, $s = 1, \ldots, N$; компоненты симметричной матрицы $\mathbf{B}(t)$ кусочно-непрерывны при $t \geqslant 0$; скалярная функция $p(t)$ кусочно-непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$. Не умаляя общности, считаем, что множество точек разрыва функции $p(t)$ и ее производной содержится во множестве точек разрыва функции $\sigma(t)$ (в противном случае объединим указанные два множества в одно и будем считать это новым множеством точек переключений потенциальных сил).

Следуя стандартным предположениям, полагаем, что кинетическая энергия удовлетворяет при всех $\mathbf{q} \in R^n$, $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ оценкам:

$$k_1 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \leqslant T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leqslant k_2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2,$$

$$\left\| \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right\| \leqslant k_3 \|\dot{\mathbf{q}}\|, \quad \left\| \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leqslant k_4 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2,$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – некоторые положительные постоянные.

Таким образом, на динамику системы (1) влияют как плавные изменения нестационарных параметров, так и резкие скачки, вызванные разрывами нестационарных параметров либо сменой потенциала.

Целью настоящей статьи является установление условий, гарантирующих асимптотическую устойчивость положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1), а также оценка влияния на устойчивость возможных нестационарных возмущающих сил. Отметим, что переключаемая система вида (1) со стационарными параметрами исследовалась в [15]. Там переключения происходили между конечным набором возможных режимов функционирования системы. Присутствие нестационарных параметров с, вообще говоря, бесконечным числом точек разрыва усложняет задачу, поскольку теперь количество возможных режимов становится бесконечным. Кроме того, если эти нестационарные параметры могут неограниченно возрастать или, напротив, сколь угодно близко приближаться к нулю, то полученные в [15] результаты будут неприменимы к такой нестационарной системе.

3. Использование разрывной функции Ляпунова

Пусть последовательность $\{\tau_i\}_{i=0}^{+\infty}$, где $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots$, задает моменты переключений потенциальных сил. Полагаем, что на любом конечном временном промежутке число этих моментов переключений конечно, в то время как их общее число на интервале $[0, +\infty)$ бесконечно. Для определенности будем считать, что элементы матрицы $\mathbf{B}(t)$, а также функции $\sigma(t)$ и $p(t)$ непрерывны справа в своих точках разрыва.

Сделаем следующие предположения.

Предположение 1. При всех $t \geqslant 0$ и $\mathbf{z} \in R^n$ справедливы неравенства

$$b_1(t)\|\mathbf{z}\|^2 \leqslant \mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(t)\mathbf{z} \leqslant b_2(t)\|\mathbf{z}\|^2,$$

где $b_1(t), b_2(t)$ – кусочно-непрерывные положительные функции, имеющие положительный левосторонний предел в точках разрыва.

Предположение 2. Потенциалы $\Pi_s(\mathbf{q})$ положительно определены.

Из предположения 2 вытекает существование таких положительных констант c_{1s}, c_{2s}, для которых при всех $\mathbf{q} \in R^n$ будут справедливы неравенства

$$c_{1s}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \leqslant \Pi_s(\mathbf{q}) \leqslant c_{2s}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}, \quad s = 1, \ldots, N.$$

Предположение 3. Выполнены условия:

1) функция $p(t)$ положительна при всех $t \geqslant 0$, причем $p(\tau_i - 0) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$;

2) при всех $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$, верно неравенство

$$-p'(t) \leqslant \frac{l}{k_2} p(t) b_1(t).$$

Здесь $l = \mathrm{const} \in (0, 1)$.

Если параметр $p(t)$ возрастает в некоторый момент времени t, то неравенство в условии 2) предположения 3 будет автоматически выполнено для этого момента. Таким образом, указанное неравенство накладывает ограничение лишь на допустимую скорость убывания параметра $p(t)$.

Построим разрывную функцию Ляпунова

$$V(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{p(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi_\sigma(\mathbf{q}) + r\,\gamma(t)\,\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\,\mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \tag{2}$$

где r – положительная постоянная, $\gamma(t)$ – некоторая кусочно-непрерывно дифференцируемая положительная при $t \geqslant 0$ функция. Как и в случае с функцией $p(t)$, полагаем, что разрывы у функции $\gamma(t)$ и у ее производной могут происходить только в точках разрыва функции $\sigma(t)$.

Продифференцируем функцию $V(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ в силу системы (1) на интервалах (τ_i,τ_{i+1}), $i=0,1,\ldots$. Получим

$$\dot V\big|_{(1)} = -\frac{1}{p(t)}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm T}\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} - r\gamma(t)p(t)(\mu+1)\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1}\Pi_\sigma(\mathbf{q}) -$$

$$-r\gamma(t)\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1}\mathbf{q}^{\mathrm T}\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} + r\gamma(t)\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1}\mathbf{q}^{\mathrm T}\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} +$$

$$+r\gamma(t)\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^{\mathrm T}\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1}\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}} - \frac{p'(t)}{p^2(t)}T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + r\gamma'(t)\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1}\mathbf{q}^{\mathrm T}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}.$$

Тогда при $\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\in R^n$, $t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$, $i=0,1,\ldots$, приходим к оценкам:

$$\frac{k_1}{p(t)}\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2 + c_{1\sigma}\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu+1} - r\gamma(t)k_3\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu} \leqslant V(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k_2}{p(t)}\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2 + c_{2\sigma}\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu+1} + r\gamma(t)k_3\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu},$$

$$\dot V\big|_{(1)} \leqslant -\frac{b_1(t)}{p(t)}\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2 - r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma}\left\|\mathbf{q}\right\|^{2\mu} +$$

$$+r\gamma(t)b_2(t)\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu} + r\gamma(t)k_4\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu} + r\gamma(t)k_3 a\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1} +$$

$$+\max\left\{0;\ \frac{-p'(t)k_2}{p^2(t)}\right\}\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2 + r|\gamma'(t)|k_3\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu}.$$

Здесь a – положительная постоянная, выбранная так, чтобы при всех $\mathbf{q}\in R^n$ имело место соотношение $\left\|\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\left(\left\|\mathbf{q}\right\|^{\mu-1}\mathbf{q}\right)\right\| \leqslant a\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}$.

Для дальнейшего анализа понадобится один вспомогательный результат.

Пусть задана функция

$$W(t,\mathbf{z}) = -\alpha(t)z_1^p - \beta(t)z_2^q + \delta(t)z_1^u z_2^v,$$

где $t\geqslant 0$, $\mathbf{z}=(z_1,z_2)^{\mathrm T}$, $z_1,z_2\in[0,+\infty)$; p и q – положительные постоянные; u и v – неотрицательные постоянные, $u+v>0$; функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\delta(t)$ кусочно-непрерывны и положительны при $t\geqslant 0$.

Лемма 1 [16]. *Пусть выполнено неравенство*

$$\frac{u}{p}+\frac{v}{q} > 1 \tag{3}$$

и существует константа ε, удовлетворяющая ограничениям

$$\max\{0;\ v-q\} \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left\{v;\ v-\frac{(p-u)q}{p}\right\},$$

такая что функция

$$\frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\left(\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}\right)^{\frac{v-\varepsilon}{q}} \tag{4}$$

ограничена при $t \geqslant 0$. Тогда для любого $M \in (0,1)$ можно выбрать $H > 0$ так, что оценка

$$W(t,\mathbf{z}) \leqslant M\left(-\alpha(t)z_1^p - \beta(t)z_2^q\right) \tag{5}$$

будет справедлива при $t \geqslant 0$, $\|\mathbf{z}\| < H$.

Замечание 1. Нетрудно заметить, что если функция $\alpha(t)/\beta(t)$ ограничена сверху при $t \geqslant 0$, то тогда ограниченность функции (4) в условиях леммы 1 достаточно проверить для $\varepsilon = \max\{0; v-q\}$. Если же функция $\alpha(t)/\beta(t)$ ограничена снизу положительной константой при $t \geqslant 0$, то тогда ограниченность функции (4) достаточно проверить для $\varepsilon = \min\{v;\, v-(p-u)q/p\}$. Если неравенство (3) заменить на равенство и предположить, что функция (4) ограничена сверху на интервале $[0,+\infty)$ константой, достаточно близкой к нулю, то тогда для некоторого $M \in (0,1)$ можно получить соотношение (5), справедливое при всех $t \geqslant 0$, $z_1, z_2 \in [0,+\infty)$.

Применим лемму 1 к оценкам, полученным ранее на функцию Ляпунова (2) и на ее производную в силу системы (1). Для любых значений $a_1 \in (0,1)$ и $a_2 > 1$ функцию $\gamma(t)$, а также положительные константы r, a_3, a_4 и H можно выбрать таким образом, чтобы имели место неравенства

$$a_1\left(\frac{k_1}{p(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{1\sigma}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}\right) \leqslant V(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \leqslant a_2\left(\frac{k_2}{p(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + c_{2\sigma}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}\right) \tag{6}$$

при $t \geqslant 0$, $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}},\mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$,

$$\dot V\big|_{(1)} \leqslant -a_3\left(\frac{b_1(t)}{p(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 + r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma}\|\mathbf{q}\|^{2\mu}\right) \leqslant -a_4\lambda(t)V^{1+\xi}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \tag{7}$$

при $t \in (\tau_i,\tau_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots$, $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}},\mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$. Здесь $\mathbf{z} = \dot{\mathbf{q}}/\sqrt{p(t)}$, $\xi = (\mu-1)/(\mu+1)$, $\lambda(t) = \min\{b_1(t);\, \gamma(t)p(t)\}$. В самом деле, согласно лемме 1 для получения оценок (6), (7) требуется, чтобы функции

$$\gamma(t)\sqrt{p(t)}, \qquad \gamma(t)\frac{b_2^2(t)}{b_1(t)}, \qquad \frac{\gamma(t)\,p(t)}{b_1(t)}, \tag{8}$$

$$\frac{\left(\gamma'(t)\right)^2}{\gamma(t)b_1(t)} \tag{9}$$

были ограниченными при $t \geqslant 0$. Для достижения ограниченности функций (8) достаточно построить функцию $\gamma(t)$ согласно соотношению

$$0 \leqslant \gamma(t) \leqslant N\,\min\left\{1/\sqrt{p(t)};\, b_1(t)/b_2^2(t);\, b_1(t)/p(t)\right\} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0, \tag{10}$$

где N – некоторая положительная постоянная. Ограниченность функции (9) будет гарантированно иметь место, если, например, функцию $\gamma(t)$ строить в виде кусочно-постоянной функции (тогда получим $\gamma'(t) = 0$ при $t \in (\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots$).

Положим

$$\varkappa_i = \frac{a_2}{a_1} \max \left\{ \frac{k_2\, p(\tau_i - 0)}{k_1\, p(\tau_i)};\ \frac{c_{2\sigma(\tau_i)}}{c_{1\sigma(\tau_i - 0)}} \right\}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда при $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$ имеем, что

$$V(\tau_i, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \leqslant \varkappa_i V(\tau_i - 0, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Для любых значений $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ можно найти натуральное число m и неотрицательное целое число k такие, что $t_0 \in [\tau_{m-1}, \tau_m)$, $t \in [\tau_{m-1+k}, \tau_{m+k})$. В результате получаем, что величина $m = m(t_0)$ определяется выбором t_0, а величина $k = k(t_0, t)$ равна числу моментов переключений потенциала в исследуемой системе на промежутке $[t_0, t]$.

Построим вспомогательную функцию $\psi(t_0, t)$ по следующим формулам:

$$\psi(t_0, t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad k = 0,$$

$$\psi(t_0, t) = (\varkappa_m \ldots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \int\limits_{t_0}^{\tau_m} \lambda(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} (\varkappa_{m+j} \ldots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \int\limits_{\tau_{m-1+j}}^{\tau_{m+j}} \lambda(\tau)\, d\tau + \int\limits_{\tau_{m-1+k}}^{t} \lambda(\tau)\, d\tau \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Функция $\psi(t_0, t)$ положительная и кусочно-непрерывная на интервале $[t_0, +\infty)$. Моменты переключений потенциальных сил являются, вообще говоря, точками разрыва данной функции. Заметим, что функция $\psi(t_0, t)$ при некотором фиксированном значении t_0 отличается от функции $\psi(0, t)$ лишь сдвигом на константу, зависящую от выбора t_0. Для построения функции $\psi(0, t)$ следует в выписанных выше формулах положить $t_0 = 0$, $m = m(0) = 1$, $k = k(0, t)$ – количество переключений на промежутке $[0, t]$.

Рассмотрим решение $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ системы (1), выходящее в момент времени $t_0 \geqslant 0$ из начальной точки $(\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0)$, такой что $\|(\mathbf{q}_0^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$ (здесь $\mathbf{z}_0 = \dot{\mathbf{q}}_0 / \sqrt{p(t_0)}$). Интегрируя дифференциальные неравенства (7) и используя соотношения (11), получаем, что если на промежутке времени $[t_0, t]$ решение системы остается в области $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$, то будут справедливы оценки

$$V^{-\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geqslant V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + a_4\, \xi\, \psi(t_0, t) \quad \text{при} \quad k = 0,$$

$$V^{-\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) \geqslant (\varkappa_m \ldots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi}\, V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + a_4\, \xi\, \psi(t_0, t)$$
$$\text{при} \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда, учитывая неравенства (6) и проделывая аналогичные рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 из [17], придем к следующему результату.

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1–3 *и построены оценки* (6), (7), (11). *Тогда если* $\psi(0,t) \to +\infty$ *и* $p^{-\xi}(t)\psi(0,t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *то положение равновесия* $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Замечание 2. Условия асимптотической устойчивости, сформулированные в теореме 1, можно заменить более грубым, но более простым дискретным вариантом. Положим

$$\lambda_i = \inf_{[\tau_i,\tau_{i+1}]} \lambda(t), \quad p_k = \sup_{[\tau_k,\tau_{k+1}]} p(t), \quad \psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\varkappa_{i+1} \ldots \varkappa_k)^{-\xi} \lambda_i T_i, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Здесь $T_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, \ldots$. Тогда для асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) достаточно выполнения условий: $\psi_k \to +\infty$ и $p_k^{-\xi}\psi_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Таким образом, найденные условия асимптотической устойчивости определяются через соотношения, связывающие между собой длины промежутков между последовательными переключениями потенциальных сил в системе (1), величины скачков функции Ляпунова, вызванные разрывами параметра $p(t)$ и сменами потенциала, а также скорости изменения функций $b_1(t)$, $b_2(t)$, $p(t)$.

Предположим теперь, что на исследуемую систему действуют еще некоторые возмущающие силы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}} - p(t)\frac{\partial \Pi_\sigma(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{12}$$

Будем считать, что функция $\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ определена в области

$$t \geqslant 0, \quad \|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < \Delta \tag{13}$$

и удовлетворяет там условиям, гарантирующим существование, единственность решений системы (12) и их непрерывную зависимость от начальных данных.

Пусть в области (13) справедливы оценки

$$\|\mathbf{Q}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leqslant h(t)\|\mathbf{q}\|^\omega + g(t)\|\dot{\mathbf{q}}\|^\eta,$$

где ω и η – положительные постоянные, $h(t)$ и $g(t)$ – неотрицательные кусочно-непрерывные функции. Отметим, что функции $h(t)$ и $g(t)$ могут быть неограниченными на интервале $[0, +\infty)$.

Достаточные условия асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (12) можно получить, как и ранее, путем применения леммы 1 к функции Ляпунова (2) и ее производной в силу системы (12).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. *Тогда если*

$$\omega > \mu, \qquad \eta > 1 \tag{14}$$

и, кроме того, функции

$$\chi_1(t) = \frac{h(t)}{\gamma^{1/2}(t)\, b_1^{1/2}(t)\, p(t)}, \qquad \chi_2(t) = \frac{g(t)\, p^{(\eta-1)/2}(t)}{b_1(t)} \tag{15}$$

ограничены на интервале $[0, +\infty)$, *то положение равновесия* $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *системы* (12) *асимптотически устойчиво.*

Действительно, при сделанных в следствии 1 предположениях применение леммы 1 снова приведет к оценкам вида (6), (7), (11), и соответственно выполнение условий теоремы 1 будет гарантировать требуемое свойство для возмущенной системы.

Если какие-то из функций (15) неограничены на интервале $[0, +\infty)$, то для установления условий асимптотической устойчивости можно применить подход, предложенный в [18], где использовались непрерывные функции Ляпунова. Покажем, что применение разрывных функций Ляпунова также допустимо в рамках указанного подхода.

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. *Тогда, если справедливы неравенства* (14) *и имеют место предельные соотношения:*

$$\widetilde{\chi}_1(t) = \chi_1(t)\, \psi^{-(\omega-\mu)/(\mu-1)}(0,t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$
$$\widetilde{\chi}_2(t) = \chi_2(t)\, \psi^{-(\eta-1)/(2\xi)}(0,t) \to 0 \quad \textit{при} \quad t \to +\infty,$$

то положение равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *системы* (12) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство следствия 2 приведено в Приложении.

Пример 1. Пусть выполнены предположения 1–3, причем существуют такие положительные постоянные L_1, L_2, L_3, L_4 и $\hat{t}$, что справедливы неравенства

$$L_1\, t \leqslant p(t) \leqslant L_2\, t, \quad L_3 \sqrt{t} \leqslant b_1(t) \leqslant b_2(t) \leqslant L_4 \sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t}.$$

Тогда, выбирая $\gamma(t) = N/\sqrt{\tau_{i+1}}$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $(N = \text{const} > 0)$, $i = 0, 1, \ldots$, получаем, что функции (8), (9) будут ограниченными. Заметим, что в рассматриваемом случае $p(\tau_i - 0)/p(\tau_i) \leqslant L_2/L_1$ при всех значениях индекса i, таких что $\tau_i \geqslant \hat{t}$. Значит, найдется такое $\varkappa > 1$, что $\varkappa_i \leqslant \varkappa$, $i = 1, 2, \ldots$. Имеем

$$\lambda(t) \geqslant \min\left\{L_3\sqrt{t};\, N L_1\, t/\sqrt{\tau_{i+1}}\right\} \geqslant \min\{L_3\,; N L_1\}\, t/\sqrt{\tau_{i+1}}$$

при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i \geqslant \hat{t}$. Применяя теорему 1, находим, что для асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ системы (1) достаточно выполнения условия

$$\frac{1}{\tau_{k+1}^{\xi}} \sum_{i=0}^{k-1} \varkappa^{-\xi(k-i)} \frac{\tau_{i+1}+\tau_i}{\sqrt{\tau_{i+1}}} T_i \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Предположим, например, что $T_i = \text{const} > 0$, $i = 0, 1, \ldots$ (т.е. переключения потенциальных сил происходят через фиксированные интервалы времени). Тогда установленное условие асимптотической устойчивости будет выполнено, если $\xi < 1/2$, т.е. если $\mu < 3$. При этом найдется такая константа $L_5 > 0$, что $\psi(0,t) \geqslant L_5\sqrt{t}$ при $t \geqslant \hat{t}$. Значит, согласно следствию 2 асимптотическая устойчивость заданного положения равновесия сохранится для возмущенной системы (12), если выполнены неравенства (14) и имеют место соотношения

$$h(t)t^{-\frac{\omega+\mu-2}{2(\mu-1)}} \to 0, \quad g(t)t^{-\frac{\eta+4\xi-2\xi\eta-1}{4\xi}} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty.$$

4. Использование непрерывной функции Ляпунова

Наличие множителей $\varkappa_i$, $i = 1, 2, \ldots$, в оценках (11) вызвано разрывами функции Ляпунова (2), и оно в теореме 1 может привести к достаточно жестким ограничениям на закон переключений потенциальных сил. В настоящем разделе построим непрерывную функцию Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости положения равновесия $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ систем (1) и (12).

Заменим предположение 2 на более слабое.

Предположение 4. Потенциал $\Pi_1(\mathbf{q})$ положительно определен.

С учетом предположения 4 получаем, что существуют такие положительные константы c_{11}, c_{2s}, c_{3s}, $s = 1, \ldots, N$, для которых при всех $\mathbf{q} \in R^n$ будут справедливы неравенства:

$$c_{11}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1} \leqslant \Pi_1(\mathbf{q}) \leqslant c_{21}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}, \quad |\Pi_s(\mathbf{q})| \leqslant c_{2s}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}, \quad s = 2, \ldots, N,$$
$$\left\| \frac{\partial \Pi_s(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right\| \leqslant c_{3s}\|\mathbf{q}\|^{\mu}, \quad s = 1, \ldots, N.$$

Например, можно считать, что при $\sigma(t) = 1$ действует некоторое стабилизирующее управление, а при $\sigma(t) \neq 1$ оно отключается. Тогда требуется найти соотношение между длинами интервалов включения этого управления и длинами интервалов его отключения, гарантирующее сохранение асимптотической устойчивости заданного положения равновесия. Пусть последовательность $\{\tilde{\tau}_i\}_{i=0}^{+\infty}$, где $0 = \tilde{\tau}_0 < \tilde{\tau}_1 < \ldots$, задает моменты переключений, в которых значение $\sigma(t)$ меняется с 1 на какое-то другое или наоборот. Для определенности будем считать, что $\sigma(t) = 1$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$ и $\sigma(t) \neq 1$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$; $j = 0, 1, \ldots$.

Вместо предположения 3 будем использовать следующее

Предположение 5. Выполнены условия:

1) функция $p(t)$ положительна при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, причем $p(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0) > 0$, $j = 0, 1, \ldots$;

2) при всех $t \in (\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$ верно неравенство

$$-p'(t) \leqslant \frac{l}{k_2} p(t) b_1(t)$$

и, кроме того,

$$p(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0) - p(\tilde{\tau}_{2(j+1)}) \leqslant \frac{l}{k_2} \left(\tilde{\tau}_{2(j+1)} - \tilde{\tau}_{2j+1}\right) p(\tilde{\tau}_{2(j+1)}) \inf_{(\tilde{\tau}_{2j+1},\, \tilde{\tau}_{2(j+1)})} b_1(t).$$

Здесь $l = \mathrm{const} \in (0, 1)$, $j = 0, 1, \ldots$.

Условие 2) в предположении 5 накладывает ограничение на допустимую скорость убывания параметра $p(t)$ при $\sigma(t) = 1$, а также на допустимое уменьшение значения $p(t)$ с момента отключения режима $\sigma(t) = 1$ до его очередного включения.

Построим непрерывную функцию $\widetilde{p}(t)$, такую что $\widetilde{p}(t) = p(t)$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \ldots$. На интервалах $[\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \ldots$, функцию $\widetilde{p}(t)$ определим как линейную (т.е. непрерывные куски функции $p(t)$, соответствующие режиму $\sigma(t) = 1$, «склеиваем» с помощью отрезков).

Сконструируем непрерывную функцию Ляпунова

$$\widetilde{V}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{\widetilde{p}(t)} T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Pi_1(\mathbf{q}) + r\, \tilde{\gamma}(t)\, \|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\, \mathbf{q}^{\mathrm{T}} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \tag{16}$$

где r – положительная постоянная, $\tilde{\gamma}(t)$ – некоторая непрерывная кусочно-дифференцируемая положительная при $t \geqslant 0$ функция.

На интервалах $[\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \ldots$, построим функцию $\gamma(t)$, как и в предыдущем разделе статьи, например, в виде констант, удовлетворяющих оценке (10). Доопределим найденную функцию $\gamma(t)$ до функции $\tilde{\gamma}(t)$ путем непрерывной «склейки» построенных кусков так, чтобы выполнялось условие

$$0 \leqslant \tilde{\gamma}(t) \leqslant N \min\left\{1/\sqrt{\widetilde{p}(t)};\, b_1(t)/\widetilde{p}(t)\right\} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0.$$

На интервалах $[\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $j = 0, 1, \ldots$, данное условие следует из (10), поэтому достаточно «склейку» $\tilde{\gamma}(t)$ осуществить так, чтобы указанное условие сохранилось и на интервалах $[\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \ldots$. Учитывая непрерывность функции $\widetilde{p}(t)$ и кусочную непрерывность функции $b_1(t)$, это, очевидно, можно сделать, если на выбор $\gamma(t)$ наложить дополнительные требования:

$$\gamma(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0) \leqslant N \frac{b_1(\tilde{\tau}_{2j+1})}{p(\tilde{\tau}_{2j+1} - 0)}, \quad \gamma(\tilde{\tau}_{2(j+1)}) \leqslant N \frac{b_1(\tilde{\tau}_{2(j+1)} - 0)}{p(\tilde{\tau}_{2(j+1)})}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Тогда, применяя лемму 1, как и ранее, придем к оценкам:

$$\tilde{a}_1\left(\frac{k_1}{\widetilde{p}(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2+c_{11}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}\right)\leqslant\widetilde{V}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\leqslant\tilde{a}_2\left(\frac{k_2}{\widetilde{p}(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2+c_{21}\|\mathbf{q}\|^{\mu+1}\right), \tag{17}$$

справедливым при $t\geqslant 0$, $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}},\widetilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\|<\widetilde{H}_1$, и оценкам:

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{V}}\big|_{(1),(\sigma=1)}&\leqslant-\tilde{a}_3\left(\frac{b_1(t)}{p(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2+r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{11}\|\mathbf{q}\|^{2\mu}\right)\leqslant\\&\leqslant-\tilde{a}_4\lambda(t)\widetilde{V}^{1+\xi}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),\end{aligned} \tag{18}$$

справедливым при $t\in(\tilde{\tau}_{2j},\tilde{\tau}_{2j+1})$, $j=0,1,\ldots,$ $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}},\widetilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\|<\widetilde{H}_1$. Здесь $\widetilde{\mathbf{z}}=\dot{\mathbf{q}}/\sqrt{\widetilde{p}(t)}$, $\widetilde{H}_1$, $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$, $\tilde{a}_3$, $\tilde{a}_4$ – некоторые положительные постоянные, $\lambda(t)=\min\{b_1(t);\,\gamma(t)p(t)\}$, $\xi=(\mu-1)/(\mu+1)$.

Продифференцируем теперь функцию Ляпунова (16) в силу системы (1) на интервалах $(\tilde{\tau}_{2j+1},\tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j=0,1,\ldots$. Получим

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{V}}\big|_{(1),(\sigma\neq1)}=&-\frac{1}{\widetilde{p}(t)}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}-r\tilde{\gamma}(t)p(t)(\mu+1)\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\Pi_\sigma(\mathbf{q})-\\&-r\tilde{\gamma}(t)\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}(t)\dot{\mathbf{q}}+r\tilde{\gamma}(t)\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{\partial T}{\partial\mathbf{q}}+\\&+r\tilde{\gamma}(t)\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{q}}\left(\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\mathbf{q}\right)\dot{\mathbf{q}}-\frac{\widetilde{p}'(t)}{\widetilde{p}^2(t)}T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\\&+r\tilde{\gamma}'(t)\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbf{q}}}-\frac{p(t)}{\widetilde{p}(t)}\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Pi_\sigma(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial\Pi_1(\mathbf{q})}{\partial\mathbf{q}}.\end{aligned}$$

Тогда при $\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}\in R^n$, $t\in(\tilde{\tau}_{2j+1},\tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j=0,1,\ldots$, с учетом предположения 5 приходим к оценке:

$$\begin{aligned}\dot{\widetilde{V}}\big|_{(1),(\sigma\neq1)}\leqslant&-(1-l)\frac{b_1(t)}{\widetilde{p}(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|^2+r\tilde{\gamma}(t)|p(t)|(\mu+1)c_{2\sigma}\|\mathbf{q}\|^{2\mu}+\\&+r\tilde{\gamma}(t)k_4\|\dot{\mathbf{q}}\|^2\|\mathbf{q}\|^{\mu}+r\tilde{\gamma}(t)k_3a\|\dot{\mathbf{q}}\|^2\|\mathbf{q}\|^{\mu-1}+\\&+\left(r\tilde{\gamma}(t)b_2(t)+r|\tilde{\gamma}'(t)|k_3+\frac{|p(t)|}{\widetilde{p}(t)}c_{3\sigma}+c_{31}\right)\|\dot{\mathbf{q}}\|\|\mathbf{q}\|^{\mu}.\end{aligned}$$

Воспользуемся далее неравенством Йенсена

$$z_1^u z_2^v=\left(\frac{z_1}{\theta}\right)^u\left(\theta^{u/v}z_2\right)^v\leqslant u\frac{z_1}{\theta}+v\theta^{u/v}z_2,$$

верным для любых положительных значений z_1,z_2,u,v,θ, если только $u+v=1$.

Выберем некоторое число $L>0$ так, чтобы выполнялось условие:

$$-(1-l)+1/(2L)<0.$$

Тогда найдутся такие $\widetilde{H}_2 > 0$ и $\tilde{a}_5 > 0$, что при $t \in (\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \ldots,$ $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \widetilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < \widetilde{H}_2$ будут иметь место оценки

$$\dot{\widetilde{V}}\Big|_{(1),(\sigma\neq 1)} \leqslant \widetilde{\lambda}(t)\,\|\mathbf{q}\|^{2\mu} \leqslant \tilde{a}_5 \widetilde{\lambda}(t) \widetilde{V}^{1+\xi}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \tag{19}$$

Здесь

$$\widetilde{\lambda}(t) = r\tilde{\gamma}(t)|p(t)|(\mu+1)c_{2\sigma} + \frac{L}{2}\left(r\tilde{\gamma}(t)b_2(t) + r|\tilde{\gamma}'(t)|k_3 + \frac{|p(t)|}{\widetilde{p}(t)}c_{3\sigma} + c_{31}\right)^2 \frac{\widetilde{p}(t)}{b_1(t)}.$$

Построим функцию $\Lambda(t)$ по следующему правилу: $\Lambda(t) = \tilde{a}_4\lambda(t)$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$, $\Lambda(t) = -\tilde{a}_5\widetilde{\lambda}(t)$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \ldots.$ Положим $\Psi(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \Lambda(\tau)\, d\tau$ при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. Тогда приходим к теореме.

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1, 4, 5 *и построены оценки* (17)–(19). *Тогда если* $\Psi(0, t) \to +\infty$ *и* $\widetilde{p}^{-\xi}(t)\Psi(0, t) \to +\infty$ *при* $t \to +\infty$, *то положение равновесия* $\mathbf{q} = \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$ *системы* (1) *асимптотически устойчиво.*

Замечание 3. Все константы, присутствующие в (17)–(19), могут быть несложным образом оценены и выбраны. Таким образом, проверка условий асимптотической устойчивости, определяемых теоремой 2, сводится к анализу поведения заданных функций $p(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, а также построенных вспомогательных функций $\widetilde{p}(t)$, $\gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(t)$. Как и в предыдущем разделе статьи (см. замечание 2), для облегчения вычислений все эти функции можно огрублять константами на каждом из интервалов $[\tilde{\tau}_i, \tilde{\tau}_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots.$ Тогда придем к более грубому, но более простому дискретному варианту условий асимптотической устойчивости.

Пример 2. Пусть выполнены предположения 1, 4, 5, причем существуют такие положительные постоянные L_1, L_2, L_3, L_4 и $\hat{t}$, что справедливы неравенства

$$L_1\, t \leqslant p(t) \leqslant L_2\, t \quad \text{при} \quad t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1}), \quad \tilde{\tau}_{2j} \geqslant \hat{t},$$
$$L_3\sqrt{t} \leqslant b_1(t) \leqslant b_2(t) \leqslant L_4\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t}.$$

Тогда получим $L_1\, t \leqslant \widetilde{p}(t) \leqslant L_2\, t$ при $t \geqslant \hat{t}$. Выберем $\gamma(t) = N/\sqrt{\tilde{\tau}_{2j+1}}$ при $t \in [\tilde{\tau}_{2j}, \tilde{\tau}_{2j+1})$ $(N = \mathrm{const} > 0)$, $j = 0, 1, \ldots.$ В рассматриваемом случае для определения непрерывной функции $\tilde{\gamma}(t)$ достаточно построенные куски $\gamma(t)$ «склеить» отрезками на интервалах $[\tilde{\tau}_{2j+1}, \tilde{\tau}_{2(j+1)})$, $j = 0, 1, \ldots.$ Тогда придем к оценкам (17)–(19). Константы в этих оценках могут быть найдены для конкретно заданной системы (1) с помощью как аналитических, так и численных методов.

Рассмотрим теперь возмущенную систему (12).

Следствие 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда если справедливы неравенства (14) *и имеют место предельные соотношения:*

$$\delta_1(t)=\frac{h(t)}{\widetilde{p}^{1/2}(t)\,b_1(t)}\Psi^{-(\omega-\mu)/(\mu-1)}(0,t)\to 0 \quad \textit{при} \quad t\to+\infty,$$

$$\widetilde{\delta}_1(t)=\Psi^{-1}(0,t)\int\limits_{\hat{T}}^{t}\delta_1(\tau)\,b_1(\tau)\,d\tau\to 0 \quad \textit{при} \quad t\to+\infty,$$

$$\delta_2(t)=\frac{g(t)\,\widetilde{p}^{(\eta-1)/2}(t)}{b_1(t)}\Psi^{-(\eta-1)/2\xi}(0,t)\to 0 \quad \textit{при} \quad t\to+\infty,$$

$$\widetilde{\delta}_2(t)=\Psi^{-1}(0,t)\int\limits_{\hat{T}}^{t}\delta_2(\tau)\,b_1(\tau)\,d\tau\to 0 \quad \textit{при} \quad t\to+\infty$$

(*здесь* $\hat{T}$ – *некоторая положительная константа, такая что* $\Psi(0,t)>0$ *при* $t\geqslant\hat{T}$), *то положение равновесия* $\mathbf{q}=\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{0}$ *системы* (12) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство следствия 3 приведено в Приложении.

5. Заключение

В работе были рассмотрены различные подходы к оценке влияния переключений, вызванных как структурными изменениями в механической системе, так и разрывами нестационарных коэффициентов, на устойчивость заданного положения равновесия. Поскольку выбор подходящей функции Ляпунова, как правило, опирается на структуру и коэффициенты системы, то это приводит к построению, вообще говоря, разрывной функции Ляпунова. Учет перескоков, совершаемых функцией Ляпунова в точках разрыва, может наложить слишком жесткие ограничения на допустимые законы переключений. Поэтому отдельный интерес представляет возможность построения непрерывной функции Ляпунова. Кроме того, в настоящей работе было исследовано влияние на устойчивость возможных нестационарных возмущений, действующих на систему. Показано, что известные методы, применяемые ранее к гладким системам, могут быть адаптированы к разрывным системам. Отметим, что условия на возмущения зависят от полученных ограничений на закон переключений в исходной механической системе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство следствия 2. Продифференцируем функцию Ляпунова (2) в силу системы (12) при $t\in(\tau_i,\tau_{i+1})$, $i=0,1,\ldots$. Получаем, что если $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}},\mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\|<H$ и при этом $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}},\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\|<\Delta$, то тогда

$$\dot{V}\big|_{(12)}\leqslant -a_3\left(\frac{b_1(t)}{p(t)}\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2+r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma}\left\|\mathbf{q}\right\|^{2\mu}\right)+$$
$$+\left(\frac{k_3}{p(t)}\|\dot{\mathbf{q}}\|+r\gamma(t)\|\mathbf{q}\|^{\mu}\right)\left(h(t)\|\mathbf{q}\|^{\omega}+g(t)\|\dot{\mathbf{q}}\|^{\eta}\right).$$

Покажем, что постоянные $D_0 > 0$, $D > 0$ и $\hat{t} \geqslant 0$ можно выбрать так, что если

$$t_0 \geqslant \hat{t}, \qquad \frac{1}{p(t_0)} \left\|\dot{\mathbf{q}}(t_0)\right\|^2 + \left\|\mathbf{q}(t_0)\right\|^{\mu+1} < D_0\, \psi^{-1/\xi}(0, t_0), \tag{П.1}$$

то тогда

$$\frac{1}{p(t)} \left\|\dot{\mathbf{q}}(t)\right\|^2 + \left\|\mathbf{q}(t)\right\|^{\mu+1} < D\, \psi^{-1/\xi}(0, t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0. \tag{П.2}$$

Здесь $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ – решение системы (12). Действительно, зададим указанные постоянные согласно условиям

$$D_0 \leqslant D, \quad -(a_2\, \bar{c}\, D_0)^{-\xi} + (a_4\xi)/2 < 0, \quad -(a_1\, \hat{c}\, D)^{-\xi} + (a_4\xi)/2 > 0, \tag{П.3}$$

$$D^{2/(\mu+1)} \psi^{-2/(\mu-1)}(0, t) + D\, p(t)\, \psi^{-1/\xi}(0, t) < \Delta^2 \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t}, \tag{П.4}$$

$$D^{2/(\mu+1)} \psi^{-2/(\mu-1)}(0, t) + D\, \psi^{-1/\xi}(0, t) < H^2 \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t}, \tag{П.5}$$

$$\max\{\widetilde{\chi}_1(t);\ \widetilde{\chi}_2(t)\} < d \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t}, \tag{П.6}$$

где $\bar{c} = \max\{k_2;\, c_{21};\, \ldots;\, c_{2N}\}$, $\hat{c} = \min\{k_1;\, c_{11};\, \ldots;\, c_{1N}\}$, d – некоторая положительная постоянная. Условия (П.3)–(П.6) совместны. В самом деле, сначала выбираем константы D_0 и D исходя из соотношений (П.3), а затем выбираем константу $\hat{t}$ исходя из соотношений (П.4)–(П.6).

Пусть начальные данные решения $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ удовлетворяют неравенствам (П.1). Предположим, что существует такое $t_1 > t_0$, что при $t = t_1$ неравенство (П.2) обратится в равенство. Применяя лемму 1, получаем, что если константа d в условии (П.6) выбрана достаточно маленькой, то тогда на промежутке $[t_0, t_1]$ (за исключением точек разрыва) будут справедливы оценки

$$\begin{aligned} \dot{V}\big|_{(12)} \leqslant -\frac{a_3}{2} \left(\frac{b_1(t)}{p(t)} \left\|\dot{\mathbf{q}}(t)\right\|^2 + r\gamma(t)p(t)(\mu+1)c_{1\sigma} \left\|\mathbf{q}(t)\right\|^{2\mu} \right) \leqslant \\ \leqslant -\frac{a_4}{2} \lambda(t) V^{1+\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)). \end{aligned}$$

Условия (П.4) и (П.5) гарантируют, что на промежутке $[t_0, t_1]$ рассматриваемое решение остается в областях $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < \Delta$ и $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$.

Отсюда находим, что

$$V^{-\xi}(t_1, \mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) \geqslant V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) + \frac{a_4\, \xi}{2}\, \psi(t_0, t_1) \quad \text{при} \quad k = 0,$$

$$\begin{aligned} V^{-\xi}(t_1, \mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) \geqslant (\varkappa_m \ldots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi}\, V^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}(t_0), \dot{\mathbf{q}}(t_0)) + \\ + \frac{a_4\, \xi}{2}\, \psi(t_0, t_1) \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

Здесь значения $m = m(t_0)$ и $k = k(t_0, t_1)$ определяются так же, как и ранее при исследовании невозмущенной системы.

Заметим, что $\psi(t_0, t_1) = \psi(0, t_1) - (\varkappa_m \ldots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi} \psi(0, t_0)$. Тогда имеем

$$\psi(0,t_1)\Big(-(a_1\,\hat{c}\,D)^{-\xi} + (a_4\xi)/2\Big) \leqslant$$
$$\leqslant (\varkappa_m \ldots \varkappa_{m-1+k})^{-\xi}\psi(0,t_0)\Big(-(a_2\,\bar{c}\,D_0)^{-\xi} + (a_4\xi)/2\Big).$$

Левая часть полученного неравенства положительна, в то время как правая – отрицательна (см. условия (П.3)). Полученное противоречие показывает, что неравенство (П.2) должно сохраняться при всех $t \geqslant t_0$. Используя доказанное свойство решений системы (12), а также их непрерывную зависимость от начальных данных, приходим к требуемому. Следствие доказано.

Доказательство следствия 3. Как и при доказательстве следствия 2, покажем, что постоянные $D_0 > 0$, $D > 0$ и $\hat{t} \geqslant 0$ можно выбрать так, что если начальные данные решения $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ системы (12) удовлетворяют условиям

$$\text{(П.7)} \qquad t_0 \geqslant \hat{t}, \qquad \frac{1}{\widetilde{p}(t_0)}\,\|\dot{\mathbf{q}}(t_0)\|^2 + \|\mathbf{q}(t_0)\|^{\mu+1} < D_0\,\Psi^{-1/\xi}(0,t_0),$$

то тогда получим

$$\text{(П.8)} \qquad \frac{1}{\widetilde{p}(t)}\,\|\dot{\mathbf{q}}(t)\|^2 + \|\mathbf{q}(t)\|^{\mu+1} < D\,\Psi^{-1/\xi}(0,t) \quad \text{при} \quad t \geqslant t_0.$$

В самом деле, зададим указанные постоянные согласно условиям

$$\text{(П.9)} \qquad D_0 \leqslant D, \quad -(\tilde{a}_2\,\bar{c}\,D_0)^{-\xi} + \xi < 0, \quad -(\tilde{a}_1\,\hat{c}\,D)^{-\xi} + \xi > 0,$$
$$\text{(П.10)} \qquad D^{2/(\mu+1)}\Psi^{-2/(\mu-1)}(0,t) + D\,\widetilde{p}(t)\,\Psi^{-1/\xi}(0,t) < \Delta^2 \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t} \geqslant \hat{T},$$
$$\text{(П.11)} \qquad D^{2/(\mu+1)}\Psi^{-2/(\mu-1)}(0,t) + D\,\Psi^{-1/\xi}(0,t) < H^2 \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t} \geqslant \hat{T},$$
$$\text{(П.12)} \qquad \max\{\delta_1(t);\, \delta_2(t)\} < d_1 \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t} \geqslant \hat{T},$$
$$\text{(П.13)} \qquad \max\Big\{\widetilde{\delta}_1(t);\, \widetilde{\delta}_2(t)\Big\} < d_2 \quad \text{при} \quad t \geqslant \hat{t} \geqslant \hat{T},$$

где $\bar{c} = \max\{k_2;\, c_{21}\}$, $\hat{c} = \min\{k_1;\, c_{11}\}$, $H = \min\{\widetilde{H}_1;\, \widetilde{H}_2\}$, d_1 и d_2 – некоторые положительные постоянные.

Пусть для решения $(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$ системы (12) справедливы неравенства (П.7). Предположим, что существует такое $t_1 > t_0$, что при $t = t_1$ неравенство (П.8) обратится в равенство. На промежутке $[t_0, t_1]$ рассматриваемое решение остается в областях $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < \Delta$ и $\|(\mathbf{q}^{\mathrm{T}}, \widetilde{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\| < H$ (см. условия (П.10) и (П.11)). Если константа d_1 в условии (П.12) выбрана достаточно малой, то тогда, применяя лемму 1 и неравенство Йенсена, придем на промежутке $[t_0, t_1]$ (за исключением точек переключения) к оценке

$$\dot{\widetilde{V}}\big|_{(12)} \leqslant \Big(-\Lambda(t) + A\,b_1(t)\,(\delta_1(t) + \delta_2(t))\Big)\widetilde{V}^{1+\xi}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)).$$

Здесь A – некоторая положительная постоянная (зависящая от выбора D). Проинтегрируем данное дифференциальное неравенство на промежутке $[t_0, t_1]$. Получим

$$\widetilde{V}^{-\xi}(t_1, \mathbf{q}(t_1), \dot{\mathbf{q}}(t_1)) \geqslant \widetilde{V}^{-\xi}(t_0, \mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0) + \xi\,\Psi(t_0, t_1) - A\,\xi \int\limits_{t_0}^{t_1} b_1(\tau)\,(\delta_1(\tau) + \delta_2(\tau))\,d\tau.$$

Отсюда имеем

$$\text{(П.14)} \qquad \Psi(0, t_1)\left(-(\tilde{a}_1\,\hat{c}\,D)^{-\xi} + \xi - 2\,A\,\xi\,d_2\right) \leqslant \Psi(0, t_0)\left(-(\tilde{a}_2\,\bar{c}\,D_0)^{-\xi} + \xi\right).$$

Если константа d_2 в условии (П.13) выбрана достаточно малой, то (см. условия (П.9)) левая часть неравенства (П.14) будет положительной, в то время как правая – отрицательной. Установленное противоречие показывает, что оценка (П.8) должна быть справедливой при всех $t \geqslant t_0$. Учитывая непрерывную зависимость решений системы (12) от начальных данных, получаем требуемое. Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зубов В.И.* Методы А.М. Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1957.
2. *Liberzon D.* Switching in Systems and Control. Boston, MA: Birkhauser, 2003.
3. *Kuznetsov N., Lobachev M., Yuldashev M., et al.* The birth of the global stability theory and the theory of hidden oscillations // 2020 European Control Conference Proceedings. 2020. P. 769–774.
4. *Leonov G., Kuznetsov N., Kiseleva M., Mokaev R.* Global problems for differential inclusions. Kalman and Vyshnegradskii problems and Chua circuits // Differential Equations. 2017. V. 53. No. 13. P. 1671–1702.
5. *Zhai G., Hu B., Yasuda K., Michel A.N.* Disturbance attention properties of time-controlled switched systems // J. Franklin Institute. 2001. V. 338. No. 7. P. 765–779.
6. *Lu J., She Z., Feng W., Ge S.S.* Stabilisability of time-varying switched systems based on piecewise continuous scalar functions // IEEE Transact. Autom. Control. 2019. V. 64. No. 6. P. 2637–2644.
7. *Wang R., Xing J., Xiang Z., Yang Q.* Finite-time stability and asynchronously switching control for a class of time-varying switched nonlinear systems // Transact. Instit. Measurement and Control. 2020. V. 42. No. 6. P. 1215–1224.
8. *Gao X., Liberzon D., Liu J., Basar T.* Unified stability criteria for slowly time-varying and switched linear systems // Automatica. 2018. V. 96. P. 110–120.
9. *Каменецкий В.А.* Частотные условия устойчивости гибридных систем // АиТ. 2017. № 12. С. 3–25.
10. *Liu X., Liu D.* Links between different stabilities of switched homogeneous systems with delays and uncertainties // Int. J. Robust Nonl. Control. 2016. V. 26. No. 1. P. 174–184.

11. *Yang H., Zhao D., Jiang B., Ding S.* On robust stability of switched homogeneous systems // IET Control Theor. Appl. 2021. V. 15. No. 5. P. 758–770.

12. *Пестерев А.В.* Глобальная устойчивость аффинной системы второго порядка с переключениями // АиТ. 2023. № 9. С. 95–105.

13. *Козлов В.В.* Об устойчивости положений равновесия в нестационарном силовом поле // Прикл. математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 12–19.

14. *Андреев А.С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 388–396.

15. *Aleksandrov A.Yu., Lakrisenko P.A., Platonov A.V.* Stability analysis of nonlinear mechanical systems with switched force fields // Proc. of 21th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'13). June 25–28, 2013. Platanias-Chania, Crite – Greece. P. 628–633.

16. *Платонов А.В.* Исследование устойчивости решений уравнения Льенара с разрывными коэффициентами // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 226–240.

17. *Платонов А.В.* Об асимптотической устойчивости нелинейных нестационарных систем с переключениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2018. № 6. С. 20–32.

18. *Александров А.Ю.* Об устойчивости решений нелинейных систем с неограниченными возмущениями // Мат. заметки. 1998. Т. 63. № 1. С. 3–8.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Н.В. Кузнецовым.

Поступила в редакцию 14.04.2024

После доработки 04.12.2024

Принята к публикации 23.12.2024